

Dansk Fysikolympiade 2015

Udtagelsesprøve

søndag den 19. april 2015



Teoretisk prøve

Prøvetid: 3 timer

Opgavesættet består af 15 spørgsmål fordelt på 5 opgaver.

Bemærk, at de enkelte spørgsmål **ikke** tæller ens.
Ud for hvert spørgsmål er anført, hvor mange point spørgsmålet maksimalt kan give.

Hvis man har alt rigtigt, kan man opnå i alt 30 point.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Liste over udvalgte fysiske konstanter

Specifik varmekapacitet, vand	c_{vand}	$4,18 \cdot 10^3$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Specifik varmekapacitet, is	c_{is}	$1,95 \cdot 10^3$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
Specifik smeltevarme, is	L	$3,34 \cdot 10^5$	J kg^{-1}
Densitet, vand ved $0 \text{ }^\circ\text{C}$	ρ_{vand}	$9,998 \cdot 10^2$	kg m^{-3}
Densitet, is ved $0 \text{ }^\circ\text{C}$	ρ_{is}	$9,17 \cdot 10^2$	kg m^{-3}
Densitet, atm. luft ($1 \text{ atm}, 20 \text{ }^\circ\text{C}$)	ρ_{luft}	1,22	kg m^{-3}
Molarmassen, atmosfærisk luft	M_{luft}	$2,90 \cdot 10^{-2}$	kg mol^{-1}
Molarmassen, vand	M_{vand}	$1,80 \cdot 10^{-2}$	kg mol^{-1}
Middelfaststanden mellem Solen og Jorden	D_S	$1,50 \cdot 10^{11}$	m
Solens udstrålingseffekt	L_S	$3,83 \cdot 10^{26}$	W
Jordens middelfastradius	R	$6,37 \cdot 10^6$	m
Jordens masse	M	$5,98 \cdot 10^{24}$	kg
Gravitationskonstanten	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$
Tyngdeaccelerationen i Danmark	g	9,82	m s^{-2}
Tyngdeaccelerationen ved Ækvator	g	9,78	m s^{-2}
Lysets fart i vakuum	c	$3,00 \cdot 10^8$	m s^{-1}
Lydens fart i luft ($20 \text{ }^\circ\text{C}$)	c_s	340	m s^{-1}
Avogadro konstanten	N_A	$6,022 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Planck konstanten	h	$6,63 \cdot 10^{-34}$	J s
Elementarladningen	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$	C
Gaskonstanten	R	8,314	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
Boltzmann konstanten	k_B	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}
Protonens masse	m_p	$1,673 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronens masse	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27}$	kg
Elektronens masse	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$	kg
Atomar masseenhed	u	$1,661 \cdot 10^{-27}$	kg
Permittivitet for vakuum	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$	F m^{-1}

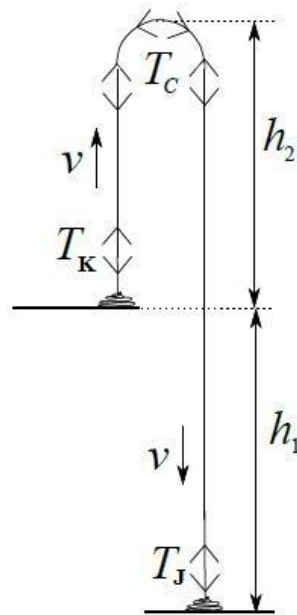
1. Et kædespringvand

En lang kæde er til at begynde med i hvile i en krukke. Kæden befinder sig i højden h_1 over jordoverfladen. Hvis den forsigtigt trækkes lidt ud over kanten på krukken, vil den af sig selv begynde at bevæge sig ud af krukken under påvirkning af tyngdekraften. Men kæden vil ikke bare krybe over kanten. Den vil på overraskende måde danne et "springvand", se Fig. 1. Springvandet har en maksimalhøjde h_2 over "kædeoverfladen" i krukken. Når springvandet er etableret, observeres de enkelte kædede at bevæge sig med den konstante fart v .¹



Figur 1. Forbavsset fysiker med et kædespringvand.

I en simpel model for kædespringvandet kan kæden opdeles i tre stykker: En lodret venstre del med længden h_2 , en cirkelbue med radius r og en lodret højre del med længden $h_1 + h_2$, se Fig.2. Det antages, at der for radius r af cirkelbuen gælder, at $r \ll h_1$ og $r \ll h_2$. Man kan se bort fra ændringen af h_2 , efterhånden som kæden løber ud af krukken.



Figur 2. Principskitse af model af kædespringvand. Snorspændingen forskellige steder på kæden er angivet med pile.

Snorspændingen (snorkraften) i kæden vil have forskellige værdier i starten af kæden, på cirkelstykket og ved enden af kæden. De fysiske størrelser i problemet, der kan have indflydelse på snorspændingen, er kædens masse pr. længde, λ , kædens fart v , når springvandet er etableret, og kæden når ned til jorden. Tyngdeaccelerationens størrelse betegnes g .

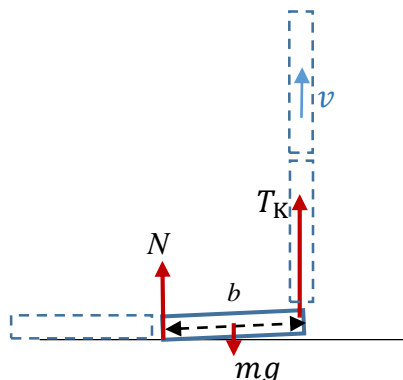
a) [1,5 point] Vis ved en dimensionsanalyse, at størrelsen af snorspændingen må have formen $T = c \lambda v^2$, hvor c er en dimensionsløs konstant.

For hele cirkelstykket kan det vises, at $c = 1$, så $T_C = \lambda v^2$.

¹J.S. Biggins, M. Warner: "Understanding the chain fountain", 2014, Proc. R. Soc. A **470**: 20130689 (<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/470/2163/20130689>) og Steve Mould: "Self-siphoning beads" (<https://www.youtube.com/watch?v=dQJBBklpQQ>)

For at bestemme snorspændingen, T_K , der virker på den første lodrette del af kæden laves en simpel model af, hvordan kæden sættes i gang, se Fig. 3.

Kædens led betragtes som en række små klodser med massen m , længden b og inertimomentet I med hensyn til massemidtpunktet. I den højre ende af klodsen virker snorspændingen T_K fra den del af kæden, der allerede er i bevægelse. Når klodsen begynder at blive løftet i højre ende og drejer omkring sin venstre ende, vil der være en normalkraft N fra underlaget. Man kan regne med, at tyngdekraften på en enkelt klods er forsvindende lille i forhold til både T_K , N og tyngdekraften på de lange, lodrette stykker af kæden.



Figur 3. Model af et kædeled som en lille klods (fuldt optrukket). Nogle af de øvrige kædeled er vist med stiplede kontur.

b) [3,0 point] Vis, ved at opstille og løse de relevante bevægelsesligninger for klodsen, at $N = c_1 ma$ og $T_K = (1 - c_1)ma$, hvor $c_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4I}{mb^2} \right)$, og a er begyndelsesaccelerationen af klodsens massemidtpunkt.

Antag, at gennemsnitsaccelerationen for klodsens massemidtpunkt er lodret og den samme som begyndelsesaccelerationen, samt at klodsen opnår farten v over et stykke på $b/2$.

c) [1,5 point] Vis, at $ma = \lambda v^2$, så $T_K = (1 - c_1)\lambda v^2$.

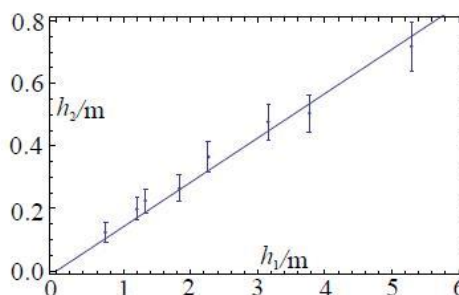
$T_j = c_2 \lambda v^2$ er snorspændingen i højre side af kæden, hvor c_2 er en konstant.

d) [2,0 point] Vis, at $T_K = T_j + \lambda h_1 g$.

e) [1,5 point] Benyt dine resultater fra **c)** og **d)** til at vise, at $v = \sqrt{\frac{h_1 g}{1 - c_1 - c_2}}$ og at $\frac{h_2}{h_1} = \frac{c_1}{1 - c_1 - c_2}$.

På Fig. 4 er vist målinger af sammenhørende værdier af h_1 og h_2 . Som en tilnærmelse kan man sætte $c_2 \approx 0$.

f) [1,0 point] Benyt grafen til at bestemme farten v af kædeleddene, hvis krukken er 3 m over jorden. Hvor lang tid tager det for en kæde med længden 50 m at løbe ud af krukken?



Figur 4. Kædespringvandets højde over krukken som funktion af krukens højde over Jorden.

2. Relativistisk billard

En partikel med hvilemassen m_0 , samlet energi E_1 og fart v_1 kolliderer med en identisk partikel i hvile, set i laboratoriesystemet. Efter kollisionen observeres i samme system, at de to partikler har samme kinetiske energi. Vinklen mellem deres bevægelsesretninger efter kollisionen benævnes θ .

a) [3,0 point] Vis, at der gælder: $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{E_1 + m_0 c^2}{E_1 + 3m_0 c^2}}$, hvor c er lysets fart.

b) [2,0 point] Bestem den numeriske værdi af vinklen i følgende to tilfælde:

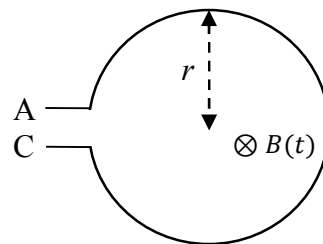
i) Den klassiske grænse, hvor $v_1 \ll c$.

ii) Den ultrarelativistiske grænse $v_1 \approx c$.

3. Induktion i spoler

En flad cirkelformet spole med radius r er placeret i et homogent magnetfelt. Magnetfeltet står vinkelret på spolen og varierer harmonisk med tiden: $B(t) = B_0 \cos \omega t$, se Fig. 5.

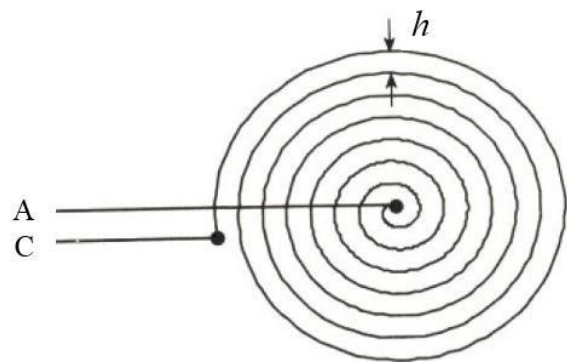
a) [1,5 point] Beregn spændingsforskellen mellem A og C. Svaret skal udtrykkes ved størrelserne B_0 , r , ω og t .



Figur 5. Induktion i cirkelformet spole

Nu erstattes den cirkelformede spole med en spiralformet spole, se Fig.6. Som i spørgsmål a) er magnetfeltet er vinkelret på spiralen. Afstanden mellem vindingerne er konstant h , og det samlede antal vindinger er N , hvor $N \gg 1$.

b) [2,5 point] Beregn spændingsforskellen mellem A og C. Svaret skal udtrykkes ved størrelserne B_0 , h , N , ω og t .

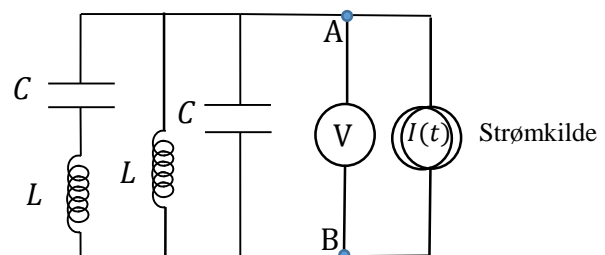


Figur 6. En spiralformet spole.

Vink: Med god tilnærmelse kan spiralen opfattes som en række koncentriske, cirkelformede spoler. Du kan muligvis få brug for, at der gælder: $\sum_{n=0}^N n^2 \approx \frac{N^3}{3}$, når $N \gg 1$.

4. Resonanskreds

På Fig. 7 er vist et kredsløb bestående af to spoler, begge med induktansen L samt to kapacitorer, begge med kapacitansen C . Kredsløbet tilsluttes en vekselstrømskilde med strømstyrken $I(t) = I_0 \sin \omega t$. Et voltmeter er indsat som vist. Alle komponenter og instrumenter kan betragtes som ideelle. Voltmetret viser rms-værdien af spændingsfaldet V_{AB} .



Figur 7. Kredsløb med AC-strømforsyning, spoler, kapacitorer og voltmeter.

a) [1,5 point] Bestem et tilnærmet udtryk for voltmetrets visning $V_{\text{voltmeter1}}$, når ω er meget lille, men ikke nul. Svaret skal udtrykkes ved I_0 og en eller flere af størrelserne ω , L og C .

b) [1,5 point] Bestem et tilnærmet udtryk for voltmetrets visning $V_{\text{voltmeter2}}$, når ω er meget stor. Svaret skal udtrykkes ved I_0 og en eller flere af størrelserne ω , L og C .

c) [3,0 point] Vis, at der generelt gælder følgende udtryk for voltmetrets visning:

$$V_{\text{voltmeter}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\left| \frac{1}{\omega L} - \omega C + \frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \right|} I_0 .$$

d) [1,5 point] Beregn for nedenstående komponentværdier den eller de værdier af ω , hvor der er resonans.

$$L = 100 \text{ mH} , C = 300 \text{ nF} .$$

5. Hydrogenatomets størrelse

Ifølge en simpel klassisk model er den samlede energi for elektronen i et hydrogenatom:

$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, hvor p , m , e og r står for henholdsvis elektronens bevægelsesmængde, masse, ladning og baneradius i bevægelsen omkring kernen. ϵ_0 er permittiviteten for vakuum.

Hvis Heisenbergs usikkerhedsprincip $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar$ anvendes på modellen med $p \approx \Delta p$ og $r \approx \Delta r$, får man, at $p \approx \hbar/r$, hvor $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, og h står for Planck konstanten.

a) [3,0 point] Bestem en tilnærmet værdi for radius af hydrogenatomet.

Opgavesættet slut